

ANÁLISIS DE ERRORES ASOCIADOS A LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO. UNA APROXIMACIÓN DESDE LA ZONA DE DESARROLLO PRÓXIMO

Nicolás Sánchez Acevedo

Colegio Pedro Apóstol – Universidad Academia Humanismo Cristiano – Chile

nicolas1983@cicata.edu.mx

Nivel: Educación Media – Categoría: Errores, obstáculos y dificultades en la Enseñanza y el aprendizaje de la Matemática

El presente trabajo tiene por objetivo analizar tipos de errores que comete una estudiante en la resolución de ecuaciones de primer grado en primer año de secundaria de una institución educativa. La investigación se enmarca como un diseño de estudio de caso, utilizando como aproximación teórica la zona de desarrollo próximo (ZDP) de aprendizaje sociocultural de Vigotsky. Los resultados evidencian la potencialidad de esta aproximación teórica, dado que los errores cometidos en la resolución de ecuaciones de primer grado disminuyeron considerablemente. Los errores encontrados se presentaron en la mayoría de las ecuaciones propuestas y estas se atribuyen principalmente a errores que se dan en la prioridad de operaciones y confusión de inversos aditivos y multiplicativos.

I. Planteamiento del problema

El eje de patrones y álgebra es uno de los ejes que el currículo nacional aborda desde los niveles pre-básicos en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. En primero medio, el set de contenidos dentro del eje de “Álgebra” incluye operatoria con expresiones algebraicas (+, -, x y /), factorizaciones de expresiones algebraicas, estrategias para resolver ecuaciones de primer grado, función lineal y afín, composición de funciones y modelos con funciones lineales. Gran parte del eje se dedica al desarrollo de estrategias de resolución de ecuaciones de primer grado, las cuales por su forma de operacionalización generan, dificultades y errores. Muchos de los errores que cometen en la resolución de ecuaciones de primer grado están asociados a las nociones y usos que traen de su aprendizaje de la aritmética de la matemática primaria (Kieran y Filloy, 1989).

La enseñanza de ecuaciones de primer grado y por consiguiente el aprendizaje de estrategias para su resolución, implica el conocimiento en la operatoria en \mathbb{Z} y sus propiedades (al menos intuitivamente), lo que implica un trabajo planificado por parte del profesor y la forma en que desarrollará la enseñanza de dicho tema. Las dificultades y errores que cometen los estudiantes muchas veces estas asociadas al micro-sistema educativo y las normativas de enseñanza impuestas, lo que limita el actuar del profesor en el aula y aquellos procesos de interacción que se deben dar entre estudiante, contenido, profesor e institución (García, 2010). Estas dificultades, es posible enfocarlas en varios

Sánchez, N. (2014). Análisis de errores asociados a la resolución de ecuaciones de primer grado. Una aproximación desde la zona de desarrollo próxima. En Editor Montero, P., Barrera, R., Montaña, R., Palominos, F., Santander, R., Silva, H., Soto, D (Eds.), *Acta Jornadas Nacionales de Educación Matemática XVIII*, (pp. 196-203). Lugar: Santiago-Chile.

sentidos, dependiendo del elemento que se priorice: desarrollo cognitivo de los alumnos, currículo de matemáticas y métodos de enseñanza.

Caballero (2010) plantea que aparte de ser, las ecuaciones un tema estudiado por casi toda la enseñanza formal, se han reportado dificultades y errores en el aprendizaje de este concepto, atribuidos al uso del signo igual, el uso de propiedades simétricas y el significado dado a los literales.

Considerando lo habitual que puede ser que los estudiantes cometan errores en la tratamiento de estrategias de ecuaciones de primer grado, es importante desarrollar estrategias y recursos para trabajarlos, utilizando este mismo error como recurso potencial de aprendizaje, pues, los errores que cometen los estudiantes en su proceso de aprendizaje proporcionan una rica información acerca de cómo se construye el conocimiento matemático; se constituyen en una excelente herramienta para revelar el estado del conocimiento de los alumnos (Puerto, Minnaard y Seminara, 2004, p. 4). Considerando la importancia del análisis de los errores en procesos de estrategias de resolución de ecuaciones de primer grado se consideró como aproximación teórica la zona de desarrollo próxima de Lev Vigotsky para corregir y eliminar estos errores, la que analiza la distancia entre lo que un estudiante puede desarrollar de forma independiente y el nivel potencial al resolver un problema guiado por un adulto o compañero más capaz (en Ramos, Aguilar y León, 2009)

Considerando lo expuesto se considera como pregunta guía de la investigación, la siguiente: **¿Qué tipos de errores se cometen en la resolución de estrategias de ecuaciones de primer grado?**

Los objetivos se definen por:

- **General:** Describir los errores que se cometen al aplicar estrategias de resolución de ecuaciones de primer grado
- **Específicos:** (i) Identificar los tipos de errores que se cometen al aplicar estrategias de resolución de ecuaciones de primer grado y (ii) Proponer una aproximación metodológica de enseñanza que promueva el aprendizaje y la disminución de errores en el desarrollo de estrategias de ecuaciones de primer grado.

II. Marco teórico

II.I. Las ecuaciones en el currículo escolar

Sánchez, N. (2014). Análisis de errores asociados a la resolución de ecuaciones de primer grado. Una aproximación desde la zona de desarrollo próxima. En Editor Montero, P., Barrera, R., Montaña, R., Palominos, F., Santander, R., Silva, H., Soto, D (Eds.), *Acta Jornadas Nacionales de Educación Matemática XVIII*, (pp. 196-203). Lugar: Santiago-Chile.

El tratamiento de ecuaciones de primer grado comienza a abordarse desde los cursos iniciales de enseñanza primaria, con situaciones que planteen equilibrio y desequilibrio, ya en primero básico. En cuarto básico se abordan la resolución de ecuaciones en un paso por medio de adiciones, por ejemplo: $24 + \square = 60$ y por medio de sustracciones, como por ejemplo: $\square - 19 = 51$, aplicando relaciones inversas (MINEDUC, 2012). En séptimo y octavo de enseñanza básica se comienza a abordar el desarrollo de ecuaciones de primer grado a un nivel más abstracto, como por ejemplo ecuaciones de la forma $\frac{2}{5}a + 4 = 8$ en séptimo y ecuaciones de la forma $3 - 3y = 5y - 21$ en octavo. Este tipo de ecuaciones ya implican el conocimiento de estrategias de eliminación de paréntesis, operar ecuaciones con coeficientes enteros y fraccionarios; esto asume el manejo y conocimiento de mínimo común múltiplo, propiedad de distributividad, operaciones inversas y reducción de términos semejantes simples (al menos a modo operacional).

En primero medio se incorpora como uno de los objetivos de aprendizaje: establecer estrategias para resolver ecuaciones lineales, del tipo $3 - \frac{2x+3}{2} = 5 - \frac{x+1}{2}$ o del tipo $3x - x(x-2) = 3 - x^2$.

II.II. Errores asociados a la resolución de ecuaciones de primer grado

Diversas investigaciones en el desarrollo de tareas algebraicas dan cuenta de errores que cometen los estudiantes debido a dificultades en el aprendizaje matemático, particularmente errores asociados a la resolución de ecuaciones de primer grado están asociados.

Estos errores en el aula pasan a ser un problema habitual para los docentes en los distintos niveles educativos, dado que estos se muestran constantemente en la construcción de aprendizajes matemáticos por parte de los estudiantes lo que implica establecer criterios para diagnosticar visualizar, corregir y superar estos errores en tareas matemáticas posteriores. El uso del error como recurso de aprendizaje es importante para que los estudiantes den cuenta de la importancia de superarlos y lograr aprendizajes (García, 2010).

Las dificultades, según Palarea y Socas (1998) asociadas a la complejidad de los objetos en algebra (nuestro caso ecuaciones de primer grado) operan en dos niveles, (i) semántico, el cual indica que los signos son dados con significados claros y precisos y (ii) sintáctico, en el cual los signos pueden ser operados por medio de reglas sin significado.

En De Moreno y De Castellano (1997) se presenta una descripción de los errores más usuales en la resolución de ecuaciones de primer grado (Ver tabla 1):

Tabla 1. Tipos de errores en ecuaciones de primer grado.

i) Un número que multiplica a la incógnita en uno de los lados de la ecuación se pasa a restar al lado opuesto.	ii) Cambian el signo en un miembro de la ecuación sin hacer la misma modificación en el otro.	iii) No realizan la transposición de términos (sumandos o factores) en el orden correcto.
--	--	--

Sánchez, N. (2014). Análisis de errores asociados a la resolución de ecuaciones de primer grado. Una aproximación desde la zona de desarrollo próxima. En Editor Montero, P., Barrera, R., Montañón, R., Palominos, F., Santander, R., Silva, H., Soto, D (Eds.), *Acta Jornadas Nacionales de Educación Matemática XVIII*, (pp. 196-203). Lugar: Santiago-Chile.

$2x+1=0$ $x=-1-2$	Caso 1: $-2x+3=2$ $2x=2-3$ $-2x=-3$ Caso 2: $x=\frac{-3}{2}$	$\frac{3x-2}{2}=3$ $\frac{3x}{2}=3+2$
iv) Al resolver una ecuación realizan sólo las operaciones en un miembro de la igualdad sin hacer las debidas modificaciones en el otro. Caso 1: $5x+2=3$ $2x+3-3=5$ $3x=3-5$ Caso 2: $\frac{3x}{3}=3-5$	v) Para resolver la ecuación comienzan por desarrollar la expresión, aplicando la propiedad distributiva, pero lo hacen deficientemente. Caso 1: $5(x+2)=3$ $x+10=3$ Caso 2: $3(x+1)=4$ $3x+1=4$	vi) Al realizar las operaciones de suma o resta implicadas en alguno de los miembros de la ecuación, presentan deficiencias. Caso 1: $2(-3x+1)=4$ $6x+2=4$ Caso 2: $5y=-2+3$ $5y=-5$ Caso 3: $x=5/10$ $x=2$

Fuente: Moreno y de Castellano (1997)

II.III. Una aproximación a la zona de desarrollo próximo (ZDP) en el aprendizaje matemático

Es sabido que tanto estudiantes como profesores son actores principales en los procesos de construcción de aprendizajes matemáticos por parte de los estudiantes; más aún, dada la limitancia que impone el actual sistema de enseñanza es el profesor quien asume gran responsabilidad y la forma en como enseña ciertos temas escolares es condicionante radical en como los estudiantes lo aprenderán (Ernest, 1989)

En este sentido colaborar con el aprendizaje de los estudiantes es un factor y labor trascendente en la forma de abordar y mirar el aprendizaje de los estudiantes, en este sentido, la adquisición del conocimiento es el resultado de la interacción social en el medio cultural donde se lleve a cabo (Vigotsky, 1979). Se destacan de los aportes de Vigotsky [...] la comunicación, el lenguaje, el razonamiento, etc., los cuales se aprehenden en un contexto social y luego se internalizan.

Uno de los conceptos relevantes en el aprendizaje de los estudiantes, en particular en el aprendizaje matemático, es el de zona de desarrollo próximo (ZDP), la cual es “la distancia en el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un

Sánchez, N. (2014). Análisis de errores asociados a la resolución de ecuaciones de primer grado. Una aproximación desde la zona de desarrollo próxima. En Editor Montero, P., Barrera, R., Montaña, R., Palominos, F., Santander, R., Silva, H., Soto, D (Eds.), *Acta Jornadas Nacionales de Educación Matemática XVIII*, (pp. 196-203). Lugar: Santiago-Chile.

problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz”. (Vigotsky, 1988, p.133).

Los antecedentes teóricos explicitan que la génesis en el aprendizaje está determinada por la actividad del sujeto, en este caso del estudiante, la cual está condicionada por dos tipos de mediadores, las herramientas y los símbolos, ya sea de manera independiente en la zona de desarrollo real, o estimulado por la mediación en la zona de desarrollo potencial. Estos aprendizajes, con la ayuda de estos mediadores, propician la zona de desarrollo potencial, la cual permite acceder a estos nuevos aprendizajes, abriendo espacios para la creación de autonomía e independencia para aprender a aprender.

El trabajo se centró en el análisis de errores que comete una estudiante de primero de secundaria en una prueba de contenido en el eje de Álgebra en el tópico de ecuaciones de primer grado (9 ejercicios). En cada ejercicio se debía explicitar su desarrollo paso a paso aplicando estrategias de resolución. Se consideró un diseño de estudio de caso, que según Yin (1989) enfatizan la contextualización del objeto de investigación, al entender que un estudio de caso es una investigación empírica dirigida a investigar un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto real [...]. Se detectaron los errores que cometió la estudiante en las respuestas y desarrollos de la prueba rendida.

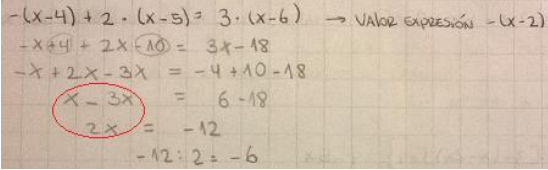
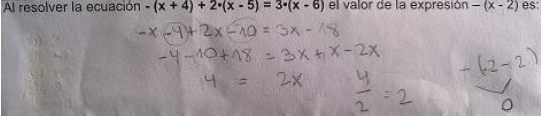
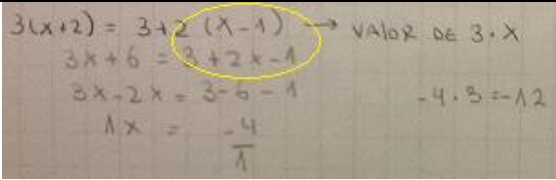
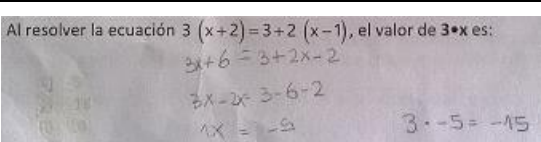
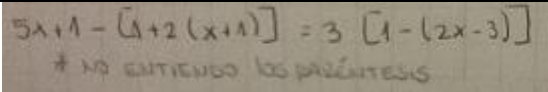
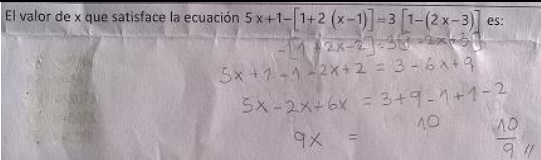
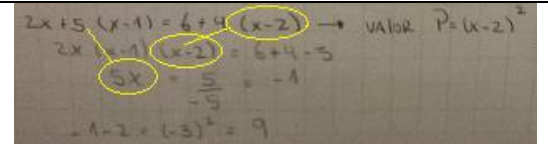
El análisis y trabajo sobre estos errores se llevó a cabo en tres sesiones de 45 minutos, siendo el procedimiento en base a un intercambio de preguntas y respuestas. Se consideraron los escasos aprendizajes que tenía la estudiante, la cual mostró una falta de comprensión en la forma de resolver ecuaciones de primer grado y, además, la disposición a mejorar su conocimiento y aprendizaje en la resolución de ecuaciones. De todos los ejercicios presentados en la prueba ocho (8) no tenían contextualización y uno (1) definía la variable como tiempo en horas. Dado que el objetivo de la evaluación buscaba a grandes rasgos que los estudiantes aplicarán estrategias de resolución. Finalmente se aplicó nuevamente la prueba de ecuaciones de primer grado para analizar el grado de aprendizaje y comprensión después de haber trabajado en base a los errores y la aproximación a niveles potenciales de aprendizaje.

III. Resultados

La prueba, como se mencionó, estaba estructurada con 4 ejercicios de resolución de ecuaciones. De estos problemas, se clasificaron y analizaron los errores cometidos por la estudiante antes y después de realizar la prueba y se constataron las diferencias (Ver tabla 2).

Tabla 2: Comparación de errores cometidos en la resolución de ecuaciones

Resolución de ecuaciones antes	Resolución de ecuaciones después
--------------------------------	----------------------------------

 <p>Se opera de manera correcta hasta la operación $x-3x$, donde el resultado obtenido es $2x$ y no $-2x$. Además no se reemplaza en la expresión explicitada.</p>	 <p>Se opera correctamente, aplican inversos de correctamente y se reemplaza en la expresión pedida.</p>
 <p>En la expresión de lado derecho no se aplica distributividad correctamente en $2(x-1)$, quedando $2x-1$</p>	 <p>La resolución es correcta y además el valor de la incógnita encontrado como solución es evaluado en la expresión $3x$.</p>
 <p>Desconocimiento de la propiedad distributiva para eliminar paréntesis. No sabe cómo operar.</p>	 <p>Se aprecia un desarrollo iterado para eliminar paréntesis, aplica inversos y desarrolla adecuadamente determinando la solución.</p>
 <p>Despeja de manera incorrecta, deja a un lado de la ecuación la expresión $(x-2)$ como si fuese un sumando, no aplica distribución para eliminar paréntesis en $5(x-1)$. No evalúa en la expresión P.</p>	

IV. Conclusiones

El análisis de los resultados de errores en la resolución de ecuaciones de primer grado y su tratamiento por medio de la aproximación de la ZDP muestra que los aprendizajes, en términos de conocimientos y disminución de errores se ve mejorada notablemente. Como se muestra en los resultados, esto implica que el trabajo guiado y potenciado por el profesor (en este caso), considerando la propuesta de Vigotsky permite mejorar las estrategias y lectura en la resolución de ecuaciones de primer grado, además de la forma en que sería viable el desarrollo de mecanismos de enseñanza para potenciar y evitar los errores en los estudiantes.

Sánchez, N. (2014). Análisis de errores asociados a la resolución de ecuaciones de primer grado. Una aproximación desde la zona de desarrollo próxima. En Editor Montero, P., Barrera, R., Montaña, R., Palominos, F., Santander, R., Silva, H., Soto, D (Eds.), *Acta Jornadas Nacionales de Educación Matemática XVIII*, (pp. 196-203). Lugar: Santiago-Chile.

Lo anterior plantea la necesidad de establecer actividades guiadas, entre profesor-estudiante o estudiante-estudiante enmarcadas en una construcción que permitan alcanzar un aprendizaje potencial desde el aprendizaje real que cada estudiante posee. Lo anterior mejoraría considerablemente las habilidades de los estudiantes en cuanto estrategias y procedimientos claros, dirigidos hacia objetivos particulares, considerando a cada estudiante.

Por otra parte, se puede desprender que la voz de los estudiantes es importante dentro del proceso de aprendizaje en el aula dado que ellos ya tienen un bagaje, en términos de conocimientos adquiridos que se pueden potenciar fuertemente si el profesor como guía del proceso de aprendizaje entrega y otorga estos espacios de construcción y considera el error matemático como un recurso potencial en el aprendizaje matemático, particularmente en la resolución de ecuaciones de primer grado.

Finalmente, lo anterior, implica la necesidad, que de acuerdo a las diferencias mostradas en ambas evaluaciones y la disminución de errores de operacionalización se establezcan cambios y transformaciones en las concepciones tradicionales de estrategias de enseñanza, dado que como se mostró, el trabajo desde el error en ecuaciones de primer grado considerando la ZDP potencia el aprendizaje, la participación y la disminución de errores por parte de quien ejecuta dicha tareas. No debe considerarse el error como algo punitivo, si no que al contrario, debe ser un recurso a considerar dentro del proceso de aprendizaje matemático. El sistema actual necesita de forma urgente de estudiantes que estén bien preparados, con capacidad crítica y analítica para desenvolverse, tanto académica, personal y socialmente.

Referencias bibliográficas

- Caballero, M. (2010). *Concepciones y enseñanza del concepto ecuación lineal. Un estudio con profesores de bachillerato*. (Tesis de licenciatura) .Mérida, Yucatán, México: Universidad Autónoma de Yucatán.
- De Moreno, I. y De Castellanos, L. (1997). Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita. *Revista EMA*, 2(3), 247-258.
- Del Puerto, S. M., Minnaard, C. L., & Seminara, S. A. (2004). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de educación*, 3, 6.
- Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. En Ernest, P. (Ed.). *Mathematics Teaching: The State of the Art*, London, Falmer Press, (pp. 249-254).
- García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura*. Tesis de fin de Master. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, Granada.
- Sánchez, N. (2014). Análisis de errores asociados a la resolución de ecuaciones de primer grado. Una aproximación desde la zona de desarrollo próxima. En Editor Montero, P., Barrera, R., Montaña, R., Palominos, F., Santander, R., Silva, H., Soto, D (Eds.), *Acta Jornadas Nacionales de Educación Matemática XVIII*, (pp. 196-203). Lugar: Santiago-Chile.

- Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7 (3), pp. 229-240.
- Mineduc, M. d. E. (2011). Programa de Estudio, Primero Medio, Matemática. Chile.
- Mineduc, M. d. E. (2012). Programa de Estudio, 7° y 8° básico, Matemática. Chile.
- Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años*, Tesis de Doctorado, Departamento de análisis matemático. Universidad de la Laguna. España
- Palarea, M. M., & Socas, M. M. (1999). Procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del lenguaje algebraico. Un estudio biográfico. *El Guiniguada*, (8/9), 319-336.
- Ramos, R. Aguilar, A y León, M. (2009, abril). *La zona de desarrollo próximo en la construcción de competencias en la enseñanza del método de descomposición LU, en escuelas de ingeniería*. Ponencia presentada en el Tercer foro nacional de ciencias básicas, Formación científica del ingeniero, Mexico.
- Vygotsky, L. S. (1979). Desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Barcelona, España: Grijalbo-Critica.
- Vigotsky, L. (1988). El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. México: Editorial Crítica, Grupo editorial Grijalbo.
- Yin, R. (1989). *Case Study Research. Design and Methods*. London, SAGE.